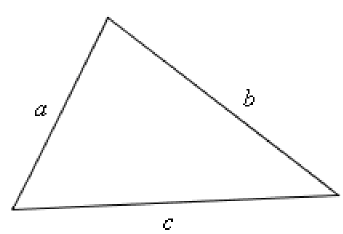
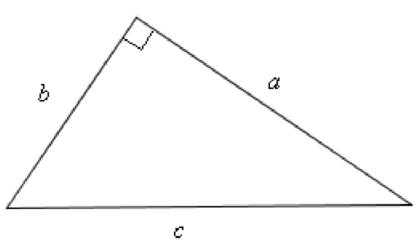
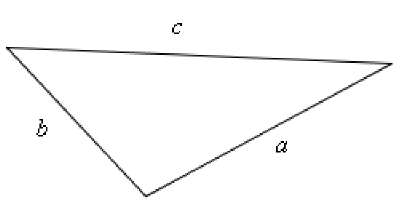
- Mediante la comparación de la suma de los cuadrados de los catetos, con el cuadrado de la hipotenusa, podemos clasificar por sus ángulos un triángulo.

A. Recíproco del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras permite clasificar un triángulo por la medida de sus ángulos sin conocerlos, es decir, conociendo únicamente la medida de los lados:

Para clasificar un triángulo según la medida de sus ángulos, basta comparar la suma de los cuadrados de los dos lados menores con el cuadrado del lado mayor. Si a y b son los lados menores y c es el mayor entonces:

Si $a^2+b^2>c^2$ el triángulo es **acutángulo**

Si $a^2+b^2=c^2$ el triángulo es **rectángulo**

Si $a^2+b^2<c^2$ el triángulo es **obtusángulo**


EJEMPLO 1. En cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas dadas corresponden a los lados de un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

a) $(21, 72, 75)$

b) $(2\sqrt{3}, 2, 3)$

c) $(6, 2, 3)$

d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, 1\right)$

e) El triángulo con vértices en $A(-2,3); B(1,4); C(4,5)$

Una **tripleta pitagórica**, es una tripleta de números enteros que representan lados de un triángulo rectángulo, es decir (a,b,c) tales que $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ y $a^2+b^2=c^2$.

Por ejemplo, $(3,4,5)$ es una tripleta Pitagórica.

Una tripleta pitagórica se dice **tripleta pitagórica primitiva** si está formada por tres números que no tienen divisores en común.

EJEMPLO 2. Encuentre 3 tripletas Pitagóricas.

EJEMPLO 3. Determine cuáles de las tripletas que encontró son primitivas.

EJEMPLO 4. Si tenemos un triángulo rectángulo cuyos lados son todos enteros, y duplicamos los lados, ¿obtenemos una nueva tripleta Pitagórica? ¿Y si los triplicamos?

Soluciones A.

EJEMPLO 1: En cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas dadas corresponden a los lados de un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo

a) $\left(21,72,75\right)$

En este caso tenemos que $21^2+72^2 \square\ 75^2$

$441+5184\square 5625 \qquad 5625=5625$

Como se cumple la igualdad, el triángulo es rectángulo.

b) $\left(2\sqrt{3},2,3\right)$

Como $2\sqrt{3}\approx 3{,}46$, este sería el lado mayor del triángulo, entonces: $2^2+3^2\square\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$4+9\square 12 \qquad 13>12$

Así, el triángulo es acutángulo.

c) $\left(6,2,3\right)$

Debemos observar que con esas medidas no es posible formar ningún triángulo ya que no se cumple la desigualdad triangular, entonces no es posible clasificarlo.

d) $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{5},1\right)$

El lado mayor es 1, entonces $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\square 1^2$

$\frac{4}{9}+\frac{9}{25}\square 1 \quad \frac{181}{225}<1$, de donde el triángulo es obtusángulo**.**

e) El triángulo con vértices en $A\left(-2,3\right);B\left(1,4\right);C\left(4,5\right)$

Primero debemos calcular la medida de los lados. Sin embargo, dado que debemos luego, calcular los cuadrados para aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras, no calcularemos las raíces.

Tenemos que:

$$AB^2=\left[1-\left(-2\right)\right]^2+\left(4-3\right)^2=10$$

$$BC^2=\left(4-1\right)^2+\left(5-4\right)^2=10$$

$$CA^2=\left(-2-4\right)^2+\left(3-5\right)^2=40$$

Al ser $40>10+10$ el triángulo es obtusángulo.

EJEMPLO 2: Encuentre 3 tripletas Pitagóricas.

Algunas tripletas Pitagóricas son:

$$\left(6,8,10\right),\left(5,12,13\right),\left(7,24,25\right),\left(10,24,26\right).$$

EJEMPLO 3: Determine cuáles de las tripletas que encontró son primitivas.

Son primitivas $\left(5,12,13\right),\left(7,24,25\right)$.

EJEMPLO 4: Si tenemos un triángulo rectángulo cuyos lados son todos enteros, y duplicamos los lados, ¿obtenemos una nueva tripleta Pitagórica? ¿Y si los triplicamos?

Esto lo podemos ver de dos maneras distintas. La primera es geométrica. Al duplicar los lados del triángulo, se obtiene otro semejante. Como el primero es rectángulo, el segundo lo será también. Como en el primero los lados miden longitudes enteras, entonces, en el segundo sucederá igual. Así que sí forma una tripleta Pitagórica.

Algebraicamente, lo podemos ver así: Supongamos que los lados del primer triángulo son $\left(a,b,c\right)$, entonces, $a^2+b^2=c^2$. Ahora, los lados del segundo triángulo son $\left(2a,2b,2c\right)$ y debemos verificar que cumplen el teorema de Pitágoras

$$\left(2a\right)^2+\left(2b\right)^2=4a^2+4b^2=4\left(a^2+b^2\right)=4c^2=\left(2c\right)^2$$

En el penúltimo paso usamos $a^2+b^2=c^2$. Si triplicamos los lados sucede lo mismo.

Ejercicio A.

I PARTE: En cada uno de los siguientes casos, determine si las tripletas dadas corresponden a los lados de un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

1. $(25,24,7)$

2. $(12,7,5)$

3. $\left(\frac{5}{2},2,\frac{3}{2}\right)$

4. $(7,8,9)$

5. $\left(2\sqrt{5},\sqrt{8},\sqrt{7}\right)$

6. $\left(7{,}5\ ,\frac{15}{4},8\right)$

7. $\left(5^2,3^2,4^2\right)$

8. $\left(2\sqrt{3},\sqrt{13},\sqrt{5}\right)$

9. $\left(\frac{5}{3},\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$

10. $\left(3\sqrt{5},3\sqrt{5},3\sqrt{5}\right)$

11. $\left(1,\frac{3}{\sqrt{10}},0{,}\overline{3}\right)$

12. $\left(2\sqrt{3},\sqrt{10},\sqrt{2}\right)$

13. El triángulo con vértices en $A(-4,2);B(4,2);C(1,8)$.

14. El triángulo con vértices en $A(-6,-4);B(2,-3);C(8,1)$.

15. El triángulo con vértices en $A\left(-2\sqrt{3},2\right);B(0,0);C\left(6,6\sqrt{3}\right)$.

16. El triángulo con vértices en $A(-2,0);B(23,60);C(167,0)$.

II PARTE: Con respecto a las **Tripletas Pitagóricas** conteste las siguientes preguntas:

1. Encuentre tres tripletas pitagóricas primitivas (no utilice las de los ejemplos).

2. Demuestre que si (a,b,c) es una tripleta pitagórica, entonces, $(n\cdot a,n\cdot b,n\cdot c)$ también es una tripleta pitagórica para cualquier valor $n\in\mathbb{Z}^+$.

3. Demuestre que para cualesquiera valores $n,m\in\mathbb{Z}^+$, la tripleta $\left(n^2-m^2,2nm,n^2+m^2\right)$ es pitagórica.

4. Encuentre los valores de n,m correspondientes a las tripletas que encontró en la pregunta 1.

Los siguientes ejercicios, tienen un grado de dificultad, que excede los límites de un curso regular. Sin embargo, los teoremas son interesantes como conocimiento general.

5. Demuestre que si n y m no tienen divisores en común y solamente uno de ellos es impar, entonces, la tripleta obtenida en la pregunta 3. anterior es primitiva.

6. Demuestre que cualquier tripleta pitagórica es de la forma descrita en la pregunta 3.

7. Busque información sobre el Teorema de Fermat – Wiles, ¿Cuál es la relación de este teorema con las tripletas pitagóricas?

Respuestas

Ejercicio A.
I PARTE
1. Rectángulo
2. Ninguno
3. Rectángulo
4. Acutángulo
5. Obtusángulo
6. Acutángulo
7. Obtusángulo
8. Acutángulo
9. Obtusángulo
10. Acutángulo
11. Acutángulo
12. Rectángulo
13. Acutángulo
14. Obtusángulo
15. Rectángulo
16. Rectángulo

II PARTE
1. **a)** $(21, 20, 29)$
b) $(9, 40, 41)$
c) $(11, 60, 61)$

2. Si $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow n^2\left(a^2 + b^2\right) = n^2 \cdot c^2$
$\Rightarrow n^2a^2 + n^2b^2 = n^2c^2, (n \cdot a)^2 + (nb)^2 = (n \cdot c)^2$

3.
$(n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2$
$\Rightarrow n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4n^2m^2 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4$
$n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4$

4. **a)** $n = 5, m = 2$, **b)** $n = 5, m = 4$ **c)** $n = 6, m = 5$